

Quertragseil für Oberleitung

Rutel

20. Juni 2023

1 Einführung

Aufgrund der Herkunft von Transport Fever 2 aus der Schweiz, in welcher die Oberleitung für mehrere Gleise von festen Querjochen gehalten wird, verlaufen bei den meisten Quertragwerken für deutsche Oberleitungen in der Mitte alle Seile horizontal. Das ist für jemanden mit mechanisch geschultem Auge unbefriedigend, weil diese Form nicht stabil sein kann. Für die automatisch hergestellte Oberleitung ist das zumindest nicht ohne großen Aufwand zu erreichen, aber als Konstruktion im Zusammenspiel mit den mastlosen Gleisen relativ einfach realisierbar.

Die physikalisch korrekte Form des (obersten) Tragseils erfordert einiges an Rechnung. Diese will ich hier festhalten und das Ergebnis zur Verfügung stellen. Die beiden tieferen Richtseile können hinreichend genau noch als gerade modelliert werden, auch wenn natürlich *jedes* Seil durchhängt.

2 Das Seil modellieren

Der Einfachheit halber gehe ich von der nicht 100% realistischen Annahme aus, daß die Hänger des Quertragwerks senkrecht verlaufen. Hier ist nur die Richtung des Hängeseils ab dem Quertragwerk relevant – nicht das, was in der Nähe der Richtseile passiert; die können getrost gerade bleiben, weil sie oft genug aufgehängt sind.

Als Koordinatensystem wähle ich die y -Richtung quer zum Gleis und die z -Richtung nach oben. Damit alles schön flexibel bleibt, gehe ich von $n-1$ Gleisen aus. Der (horizontale) Abstand¹ zwischen der Aufhängung am linken Mast und dem ersten Gleis ist y_1 , zwischen dem ersten und zweiten Gleis y_2 u. s. w., bis zum Abstand zwischen dem $n-1$ -ten Gleis und dem rechten Mast y_n . Wir suchen nun die senkrechten Abstände zwischen den einzelnen Aufhängepunkten $z_i, i \in \{1 \dots n\}$.

Die Masse der Fahleitung, die über dem Gleis i aufgehängt ist, sei m_i . Ich werde die Eigenmasse des Tragseils (relativ klein) sowie der Richtseile (sind auch klein und können in m_i versteckt werden) vernachlässigen: Es geht um Aussehen und nicht um Unfallverhütung.

Zu guter Letzt sei noch a der Durchhang, genauer der Abstand zwischen dem linken Aufhängepunkt und dem tiefsten Knoten des Tragseils (a ist negativ), und h die Höhendifferenz der Aufhängepunkte. Sie ist bis auf seltene Fälle wie bei unterschiedlichen Masthöhen 0. Es schadet aber zunächst nicht, sie mitzuziehen, vielleicht kann es mal jemand brauchen.

¹Intuitiv geht man eigentlich von den Aufhängepunkten bzw. Befestigungspunkten am Mast aus. Wenn man das aufschreibt, sieht man sofort, daß es einfacher ist, direkt mit den Abständen zu arbeiten.

3 Die Physik

Die Kraft in jedem Seilsegment ist

$$F_i = f_i \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

wobei diese Kraft nach rechts wirken soll. Dies ist am linken Ende des Seils der Fall, entsprechend wirkt an seinem rechten Ende die Kraft $-F_i$. f_i ist für sich genommen ein eher bedeutungsloser Faktor; wichtig ist nur, daß die Kräfte immer in Seilrichtung wirken. In den Aufhängepunkten über den Gleisen gleichen sich die beiden Kräfte durch die Segmente des Trageils und die Gewichtskraft des Aufgehängten aus:

$$-F_i + F_{i+1} - mge_z = 0 \quad \text{für alle } i \in \{1 \dots n-1\} \quad (1)$$

g ist die Gravitationsbeschleunigung und e_z der Einheitsvektor in z-Richtung (nach oben). Zusätzlich ist

$$\sum_{i=1}^n z_i = h \quad (2)$$

und

$$\sum_{i=1}^k z_i = a \quad (3)$$

wobei k der Index des Gleises mit dem tiefsten Aufhängepunkt ist. Der ist wohl irgendwo in der Mitte, die Aufgabe, ihn zu bestimmen, drücke ich später dem Computer aufs Auge. So er eines hat.

Wir haben nun über die Vektorgleichungen und die beiden weiteren Bedingungen $2n$ Gleichungen und mit den z_i und f_i auch $2n$ Unbekannte. Das sieht schon mal nett aus.

4 Reduktion der Gleichungen

Wir können im folgenden die Anzahl der Unbekannten und Gleichungen auf zwei reduzieren. Danach kann man weiter auflösen, aber es wird dadurch nicht einfacher. Als erstes schreiben wir (1) als Spaltenvektoren:

$$-f_i \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} + f_{i+1} \begin{pmatrix} y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ m_i g \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

Aus der oberen Zeile folgt

$$f_{i+1} y_{i+1} = f_i y_i$$

und daraus (mittels Induktion über i oder scharfen Hinschauens)

$$f_i = \frac{y_1}{y_i} f$$

mit $f = f_1$. Dieses kennen wir zwar immer noch nicht, aber dafür alle anderen f_i . Nun setzen wir diese Erkenntnis in die untere Zeile von (4) ein:

$$-\frac{y_1}{y_i} f z_i + \frac{y_1}{y_{i+1}} f z_{i+1} - m_i g = 0$$

Wir teilen nun durch f und führen einen neuen Parameter $\varphi = g/f$ ein. Dadurch werden die Gleichungen linear in den z_i und φ :

$$-\frac{y_1}{y_i}z_i + \frac{y_1}{y_{i+1}}z_{i+1} - m_i\varphi = 0$$

Wir können dadurch die z_i ähnlich wie oben durch z_1 ausdrücken:

$$z_i = \frac{y_i}{y_1} \left(z_1 + \varphi \sum_{j=1}^{i-1} m_j \right) \quad \text{für alle } i \in \{2 \dots n-1\}$$

Das ist ebenfalls über Induktion nachzuweisen. Auf diese Weise haben wir nur noch die zwei Variablen z_1 und φ zu bestimmen. Dabei helfen (2) und (3).

$$\begin{aligned} h &= z_1 + \sum_{i=2}^n z_i \\ &= z_1 + \sum_{i=2}^n \frac{y_i}{y_1} \left(z_1 + \varphi \sum_{j=1}^{i-1} m_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{y_1} z_1 + \sum_{i=2}^n \frac{y_i}{y_1} \varphi \sum_{j=1}^{i-1} m_j \\ &= z_1 \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{y_1} + \varphi \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_{i+1}}{y_1} \sum_{j=1}^i m_j \end{aligned}$$

Analog ist

$$a = z_1 \sum_{i=1}^k \frac{y_i}{y_1} + \varphi \sum_{i=1}^{k-1} \frac{y_{i+1}}{y_1} \sum_{j=1}^i m_j$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem in zwei Unbekannten, das sich erfahrungsgemäß nicht weiter vereinfacht. Man rechnet die Koeffizienten aus und bemüht die klassische allgemeine Lösung.

Eine gewisse Vereinfachung bekommt man, wenn man annimmt, daß die Massen m_i alle gleich sind. Das ist eigentlich nur dann ein Fehler von mehr als ein paar Prozent, wenn über einer Weiche mehrere Fahrdrähte zusammenkommen. Ich glaube nicht, daß es den Aufwand wert ist, dies zu berücksichtigen. Also klammern wir die überall gleiche Masse m aus, verstecken sie in φ und schreiben einfach:

$$\begin{aligned} h &= z_1 \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{y_1} + \varphi \sum_{i=1}^{n-1} i \frac{y_{i+1}}{y_1} \\ a &= z_1 \sum_{i=1}^k \frac{y_i}{y_1} + \varphi \sum_{i=1}^{k-1} i \frac{y_{i+1}}{y_1} \end{aligned}$$